**CAPÍTULO V - PARTE A**

***INTEGRA DE LINEA***

Hemos visto integrales definidas, donde la variable de integración toma valores en un intervalo [a, b], son las llamadas integrales simples: 

Vamos a definir ahora una integral, donde la variable de integración toma valores sobre una curva C, por lo tanto integramos sobre una curva C. Vamos a relacionar en este tema, función vectorial con campo vectorial.

* ***Cálculo aproximado de trabajo que realiza un campo vectorial:***

Sea **F(x, y) = M(x, y)i + N(x, y)j**  un campo de fuerzas en R2 definido sobre un región S del plano (en R3 este campo podría ser el campo gravitacional, o un campo electromagnético), y sea C una curva suave definida por **: r(t) = x(t)i +y(t)j para a**  ≤ **t**  ≤ **b incluida en S**.

**“Queremos calcular el trabajo que realiza el campo F, para mover un objeto sobre la curva C, desde un punto A que corresponde a un tiempo t = a, hasta otro punto B que corresponde a un tiempo t = b.”**

En física, se define trabajo hecho por la fuerza **F**  para mover un cuerpo una distancia **d**, como el producto de la magnitud de la fuerza **F** por la distancia **d** que se mueve la partícula W**= |F| d .**

F

**T**

**d**

La fuerza constante, puede no estar en la dirección del movimiento, en este caso definimos el trabajo hecho por la fuerza sobre el cuerpo como el producto de la **componente de la fuerza en la dirección del** **movimiento**, **por la distancia** que se mueve el cuerpo a la largo de esa línea. La componente de la fuerza **F** en dicha dirección es | **F | cos **  (siendo **** el ángulo que forma con la dirección del desplazamiento)

Que se puede expresar como **F. T** siendo T el vector unitario en la dirección del desplazamiento.

El trabajo es entonces: **W= ( F.T) d**

**F**



**T**

d

Pero ahora el movimiento no es en línea recta, sino que se mueve sobre una curva C

Vamos a dividir la curva C en pequeños arcos, de modo que cada uno sea casi un segmento, quedando determinados **n arcos**.

Calculamos el trabajo que realiza el campo en cada arco, con la fórmula anterior, y después lo sumamos.

Eso nos dará aproximadamente el trabajo buscado.

Dentro de la partición consideramos el arco determinado por los puntos Pk y P k+1 que corresponden a los tiempos t k y t k+1 respectivamente. Dentro de este arco el vector de campo **Fk** es aplicado en un punto muestra cualquiera, en este caso elegimos P **k** , **Δsk** es la distancia, y **Tk** es el vector tangente unitario a la curva en el punto **Pk ,**

**F k**

**Tk** **P k+1**

**Pk**

**Δsk** **B = r(b)**

**A= r(a)**

El producto escalar (**Fk . Tk**) nos da la **componente del vector de campo F k  en la dirección del vector tangente** en el punto Pk

El trabajo realizado por **F** para mover un objeto a lo largo del arco de curva **Pk P k+1** es:

**Wk = (Fk . Tk) Δsk**

Si tenemos **n** arcos , el trabajo realizado a lo largo de la curva (desde A hasta B ) es aproximadamente:

W = 

Si consideramos un número mayor de arcos en la partición, obtendremos una mejor aproximación. Si el número de segmentos tiende a infinito o la norma de la partición (longitud de **Δsk** ) tiende a cero, las sumatorias se aproximan al valor del trabajo real:

W = 

* **DEFINICIÓN DE INTEGRAL DE LÍNEA**

**Sea F(x,y) un campo vectorial continuo en una región S del plano IR2, y sea C una curva suave definida por : r(t) = x(t)i +y(t)j para a ≤ t ≤ b , incluida en S.**

**Si existe el siguiente limite:**



**Se llama integral de línea de F sobre C , y se anota:** 

* **FORMA DE CÁLCULO:**

Para resolver la integral de línea se puede anotar la integral de línea de dos maneras:

**a) *Forma vectorial:***

La integral de línea, la resolvemos como una integral definida. Para ello, debemos parametrizar la curva C para poder determinar los extremos de integración **r(t) = x(t)i +y(t)j para a** ≤ **t** ≤ **b**. al estar parametrizada la curva C , cada punto (x , y) de la curva se puede escribir como ( x(t) , y(t) )

En el integrando tenemos un producto escalar entre el vector **F(x(t), y(t)) = M(x(t), y(t)) i+ N(x(t), y(t)) j** , y el vector tangente unitario sabemos que es: **T =**  ,

en función vectorial vimos también que:



Como **ds** es distancia recorrida en el tiempo **dt** , podemos decir que **ds** = 

Si reemplazamos en la integral de línea nos queda:



Asociando convenientemente: 

Simplificando nos queda:



Pero como **r’(t) dt = dr** reemplazando nos queda:



Esta otra notación se llama **forma vectorial de la integral de línea**

Así escrita la integral de línea, vamos a resolverla como integral definida, resolviendo el producto escalar indicado.:

**F(x(t) , y(t)) = F(r(t)**  y **dr = r’(t) dt**

Entonces **F . dr = F(r(t)) . r’(t)**



**Ejemplo 1**:

Calcular el trabajo que realiza el campo F(x, y) = x2 i + x y j para mover una partícula desde el

punto ( 0,0) al punto (1,1) sobre la curva C dada por **r(t) = ti + t 2 j 0**  ≤ **t**  ≤ 1

Del vector posición, obtenemos x e y en función de t:

si r(t) = t i + t 2 j tenemos que: **x(t) = t** e **y(t) = t 2** reemplazando en F(x, y) nos queda:

**F(r(t)) = t 2 i + t. t2 j = t 2 i + t 3 j**

Calculamos **r’(t) = 1 i +2t j**

Reemplazamos en la integral:



**Podemos cambiar la parametrización de la curva C, y el valor de la integral de línea no cambia**.

Ejemplo: Si observamos la curva C, y = x2 vamos a cambiar la parametrización

Si queremos hacer x = √t entonces y = t es decir r(t) = √t i + t j **0**  ≤ **t**  ≤ 1

Cuidado!: el intervalo de variación de t depende de la parametrización. En este ejemplo no cambia

La curva que une los puntos sigue siendo y = x2.

Para esta nueva parametrización: F(r(t))) = ti + t3/2j ; r′(t) = 



Vemos entonces que el resultado de la integral de línea es independiente de la parametrización que se haga de la curva.

No ocurre lo mismo si consideramos otra curva que una los puntos (0,0) y (1,1)

**Para otra curva que una los mismos puntos el valor de la integral cambia.**

Si unimos los puntos (0,0) y (1,1) con la curva dada por r(t) = t i + t j , y resolvemos el ejemplo anterior, se puede comprobar que el valor de la integral de línea cambia y es **I = 2/3**

**Ejemplo 2:**

Calcular el trabajo que realiza el campo F(x,y) = x3 i + xy j para mover una partícula del punto

(0,0) al punto (4,2) si:

a) C es la curva plana determinada por r(t) = t i+1/2 t j 0 *t* 4

b) Calcular el trabajo para otra parametrización de la curva C

c) Calcular el trabajo que realiza la partícula siendo C otra curva que una los puntos

Solución:

a) si r(t) = t i+1/2 t j 0 *t* 4

tenemos que: **x(t) = t**  e **y(t) =**  **t**  reemplazando en F(x, y) nos queda:

**F(r(t)) = t 3 i + t.** **t j = t 3 i +** **t 2 j**

Calculamos **r’(t) = 1 i +  j**

Reemplazamos en la integral:



b) Buscamos otra parametrización, por ejemplo:

**x(t) = 2t**  e **y(t) =** t r(t) = 2 t i + t j con 0 *t* 2

reemplazando en F(x, y) nos queda:

**F(r(t)) = 8 t 3 i + 2 t . t j = 8 t 3 i + 2 t 2  j**

**r’(t) = 2 i + 1 j**

**F . r’(t) = 16 t 3 + 2 t 2**



1. **Buscamos otra curva que una los puntos** (0,0) al punto (4,2)

**x(t) = t**  e **y(t) =** √t r(t) = t i+ √t j con 0 *t* 4

reemplazando en F(x, y) nos queda:

**F(r(t)) = t 3 i + t 3/2 j**

**r’(t) =** 

**F . r’(t) =** 



1. ***Forma diferencial:***

Otra forma de resolver la integral de línea es expresando el integrando en términos de las variables x e y.

Hemos visto en función vectorial que r′(t) = x′(t)i + y′(t)j,

multiplicamos miembro a miembro por dt: r′(t) dt = x′(t) dt i + y′(t) dt j

en forma diferencial nos queda: dr = dx i + dy j si reemplazamos en la integral:

 **“Forma diferencial de la integral”**

**Ejemplo 4:**

Calcular la integral de línea si F(x,y) = xy i + x 2 j y r(t) = t i + t2 j para 1 ≤ t ≤ 5 utilizando la forma diferencial

x(t) = t e y(t) = t2

**F(r(t)) = t 3 i + t2 j r ’(t) = 1 i + 2t j**

Reemplazamos en la integral:



En forma diferencial:

 donde y = x2 dy= 2x dx para 1≤ x ≤ 5

=

***Propiedades de la integral de línea***

1. Sea C una curva suave a trozos formada por n curvas suaves C1, C2, …., Cn



1. Sea C una curva dada en forma paramétrica **r(t) = x(t)i + y(t)j para a ≤ t ≤ b** , y C ─ la curva opuesta ( es decir el mismo camino pero con t que va de b al valor a)



O sea 

***Teorema fundamental de la integral de línea***

***Enunciado*:**

**Sea C una curva suave a trozos situada en una región abierta R dada por:**

**r(t) = x(t)i + y(t)j para a ≤ t ≤ b siendo r(a) = A y r(b) = B**

**Si F(x,y) = M(x,y)i + N(x,y)j con M y N continuas en dicha región es conservativo en R, entonces:**

** = f(B) – f(A) siendo f la función potencial.**

***Demostración:***

Como el campo vectorial es conservativo, se cumple F(x,y) = ∇f(x,y) si reemplazamos en la integral:

 Vamos a trabajar con el integrando de la última integral.

**∇f(r(t)) . r′(t) = .=**

En el enunciado se pide que M y N sean continuas, es decir : existen las derivadas parciales de f y son continuas, esto nos asegura que la función f es diferenciable, por la regla de la cadena podemos escribir el producto anterior como**:**

**∇f(r(t)). r′(t) = ** en la integral nos queda:

**= f(B) – f(A)**

* ***Independencia de la trayectoria*:**

Como vemos en el teorema fundamental, si el campo es conservativo, el valor de la integral, solo depende del punto inicial y punto final de la curva c.

Si c1 y c2 son curvas en la región que tienen el mismo origen y el mismo extremo entonces:

****

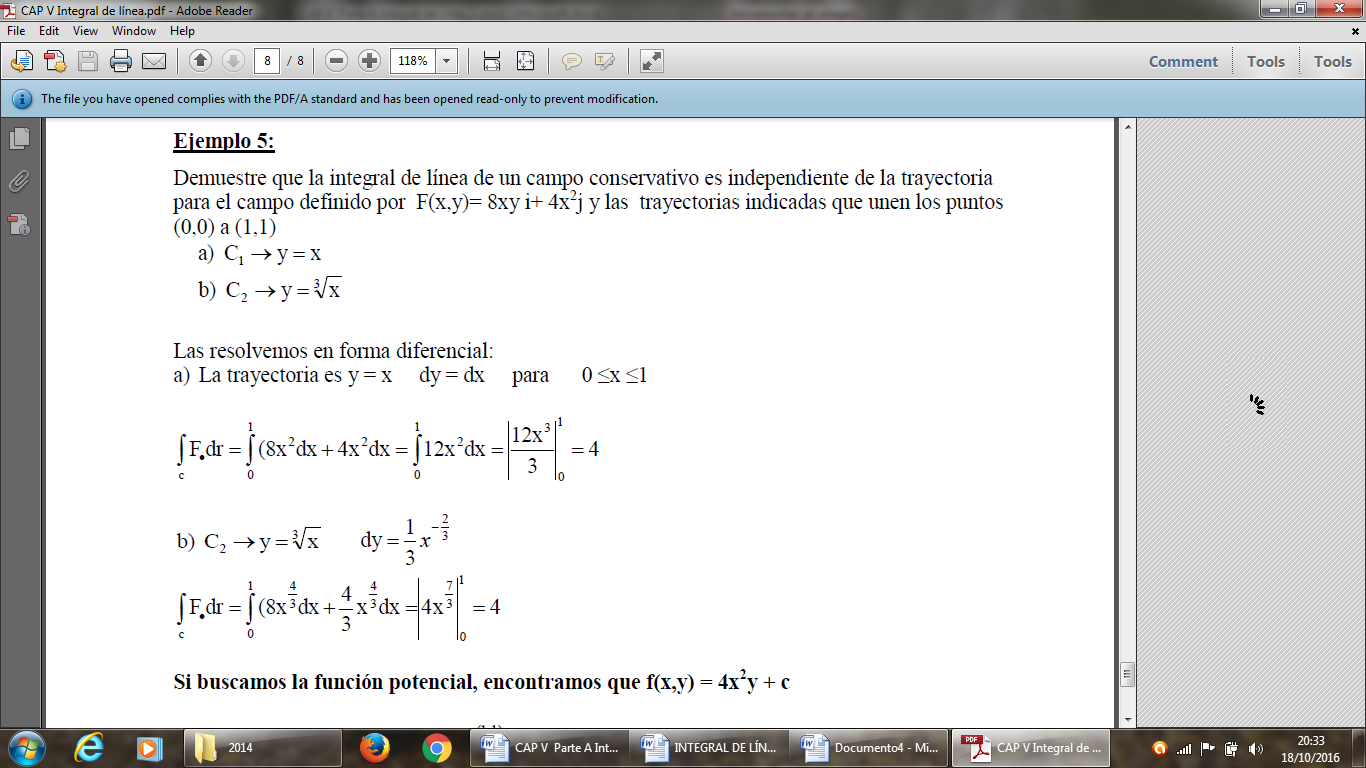
Las integrales de líneas de campos conservativos son independientes de la trayectoria.

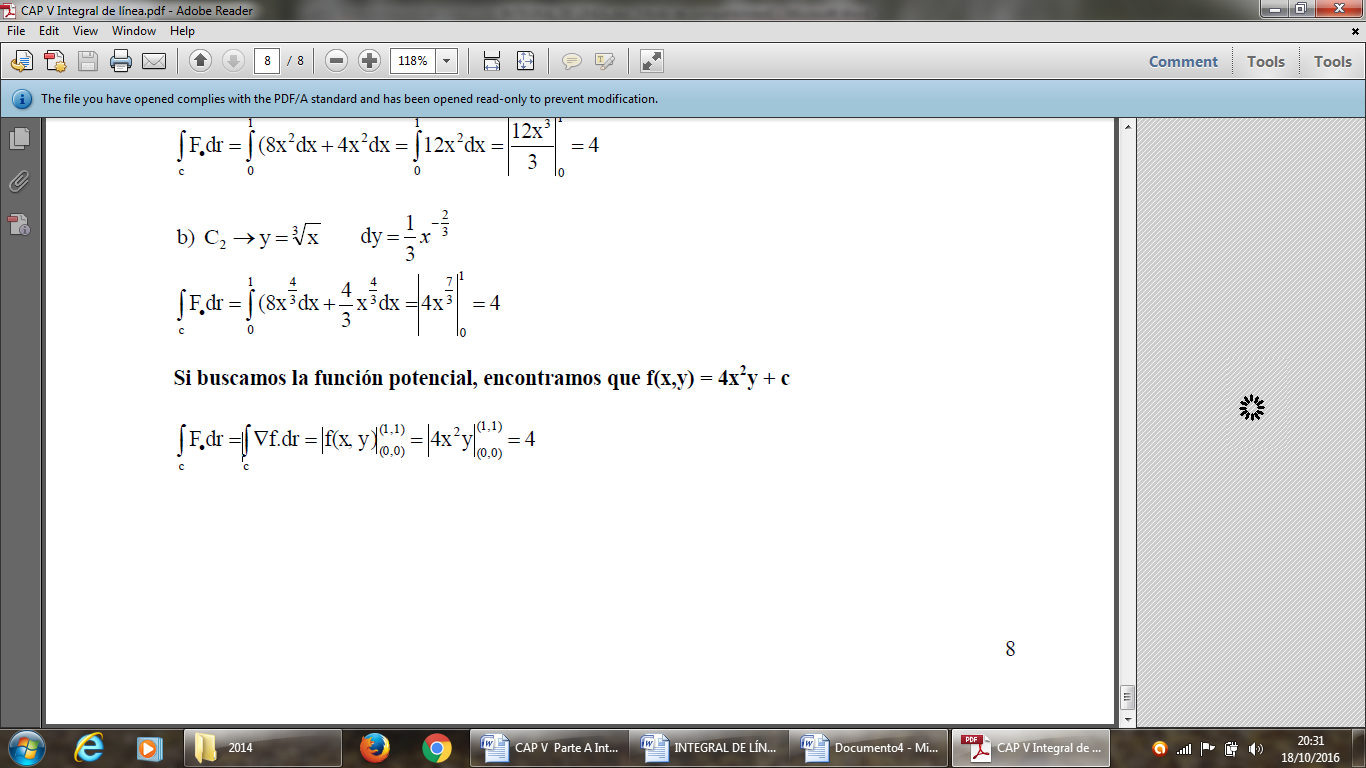
Una curva que tiene el mismo punto inicial que final, es una curva cerrada. Por el teorema fundamental, podemos concluir que si F es continuo en una región R, y conservativo, entonces la **integral de línea sobre una curva cerrada es nula. **

***Condiciones equivalentes:***

**Las siguientes condiciones, nos permiten definir un campo vectorial conservativo sobre una región abierta simplemente conexa R:**

* **F = ∇f**
* ** es independiente de la trayectoria.**
* ** para toda curva cerrada c en R**

****

****